

곡선 $y = \sqrt{x}$ 위의 점 $P(t, \sqrt{t})$ ($t > 4$) 에서 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.
(O는 원점)

⑦ $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{OH}^2}{\overline{OP}^2} = ?$ ① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{13}{15}$

이 문제가 보는 것 : 수선의 발 좌표 구하기 $\rightarrow \infty$ 꼴 극한

필요한 개념

공통수학2 · 직선의 방정식 / 미적분 I · 함수의 극한

I. 수직인 두 직선 : 기울기의 곱 = -1

II. 두 점 사이의 거리 : $\overline{OH}^2 = x^2 + y^2$

III. ∞ 꼴 : 분모의 최고차항(t^2)으로 분자·분모를 나눈다

step ① 수선의 발 H

$$\overline{PH} \perp \left(y = \frac{1}{2}x\right) \rightarrow \overline{PH} \text{의 기울기} = -2 \text{ (by I)}$$

$$\overline{PH} : y - \sqrt{t} = -2(x - t)$$

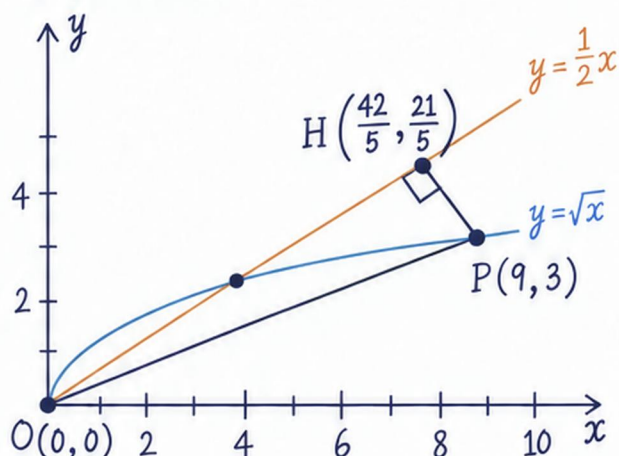
$$y = \frac{1}{2}x \text{ 와 연립} \rightarrow \frac{1}{2}x - \sqrt{t} = -2x + 2t$$

$$\rightarrow 5x = 4t + 2\sqrt{t}$$

$$H\left(\frac{4t+2\sqrt{t}}{5}, \frac{2t+\sqrt{t}}{5}\right)$$

수선의 발 = 수직인 직선과의 교점!
먼저 PH의 식부터 세워요.

$t=9$ 인 경우.



여기서 많이 틀려요!

$\overline{PH}$ 의 기울기를 $\frac{1}{2}$ 로 놓으면 안 돼요.
수직이니까 -2!

(다음 쪽에 계속 $\rightarrow$)

#09 (계속)

step ② 거리의 제곱

$$\begin{aligned} OH^2 &= x_H^2 + y_H^2 = 5y_H^2 \\ &= \frac{(2t + \sqrt{t})^2}{5} \quad (\text{by II}) \end{aligned}$$

$$OP^2 = t^2 + t$$

H는 $y = \frac{1}{2}x$ 위에 있으니까
 $x_H = 2y_H$ 예요.
계산이 확 줄어요!

step ③ 극한

$$\begin{aligned} \frac{OH^2}{OP^2} &= \frac{(2t + \sqrt{t})^2}{5(t^2 + t)} \\ &= \frac{\left(2 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2}{5\left(1 + \frac{1}{t}\right)} \quad (\text{by III}) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{2^2}{5} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이죠?

분모의 최고차항 t^2 으로
나눠요.



왜 이럴게?

$\sqrt{t}$ 는 t 에 비해 훨씬
느리게 커져요 $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$

⑦ $\frac{4}{5}$ ④

조건 사용 체크 : $P(t, \sqrt{t})$ ✓ step ①② 수선의 발 ✓ step ① $t \rightarrow \infty$ ✓ step ③

답 계산 $t = 9$: $OH^2 = 88.2$, $OP^2 = 90 \rightarrow$ 비 0.98 /
 $t = 10000$: 비 $\approx 0.808 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$ 로 다가감 ✓

sol ② 점과 직선 사이의 거리 + 피타고라스

$$x - 2y = 0 \text{ 까지의 거리} \rightarrow PH^2 = \frac{(t - 2\sqrt{t})^2}{5}$$

$$\text{직각삼각형 OHP} \rightarrow OH^2 = OP^2 - PH^2$$

$$\frac{OH^2}{OP^2} = 1 - \frac{(t - 2\sqrt{t})^2}{5(t^2 + t)} \rightarrow 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

☆ 한 줄 정리 :

수선의 발 = 기울기 곱 -1인 직선과 연립 / $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴은 최고차항으로 나누기

3점이지만 계산 순서가 핵심이었어요. 깔끔하게 해결 :)

실수 t ($0 < t < 1$)에 대하여 직선 $y = 2t$ 가 두 곡선 $y = x^2$, $y = tx^2$ 과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 A, B, 직선 $y = t+1$ 이 두 곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 C, D라 하자.

사각형 ABDC의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때,

㉠ $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{S(t)}{(1-t)^2} = ?$

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

이 문제가 보는 것 : 교점 좌표 $\rightarrow$ 사다리꼴 넓이 $\rightarrow$ 0/0 꼴 약분

필요한 개념

미적분 I · 함수의 극한

I. 곡선과 수평선의 교점 : y 값을 넣고 $x > 0$ 인 해만 (제1사분면)

II. 사다리꼴의 넓이 = (윗변 + 아랫변) $\times$ 높이 $\div 2$

III. $\frac{0}{0}$ 꼴 : 공통인수를 만들어 약분. $1-t = (1-\sqrt{t})(1+\sqrt{t})$

step ① 네 점의 x 좌표

네 점 모두 수평선 위!
그래서 사각형 ABDC는
사다리꼴이에요.

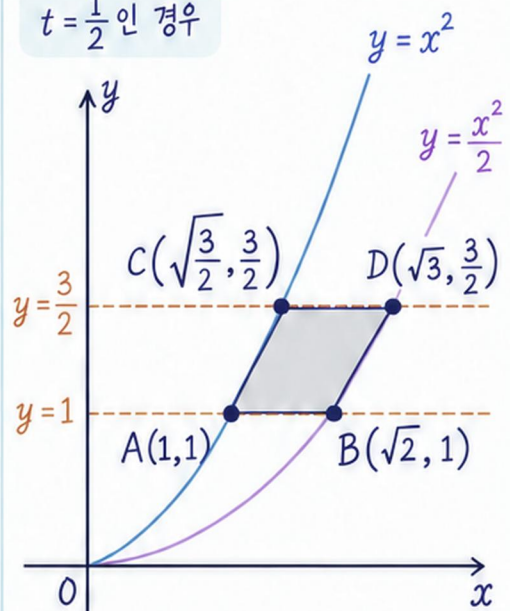
$$y = 2t : x^2 = 2t \rightarrow x_A = \sqrt{2t}, \quad tx^2 = 2t \rightarrow x_B = \sqrt{2} \quad (\text{by I})$$

$$y = t+1 : x_C = \sqrt{1+t}, \quad x_D = \sqrt{\frac{1+t}{t}}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{2}(1-\sqrt{t}), \quad \overline{CD} = \sqrt{\frac{1+t}{t}}(1-\sqrt{t})$$

$$\text{높이 } h = (t+1) - 2t = 1-t$$

$t = \frac{1}{2}$ 인 경우



왜 $1-\sqrt{t}$ 로 묶을까?

나중에 $1-t$ 와 약분하려고
미리 모양을 맞춰 뒀어요!

(다음 쪽에 계속 $\rightarrow$)

#13 (계속)

step ② 넓이

밑변 두 개를 모두 써야 해요.
사다리꼴이니까요!

$$S(t) = \frac{(AB+CD)h}{2} = \frac{(1-t)(1-\sqrt{t})}{2} \left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1+t}{t}} \right) \quad (\text{by II})$$

step ③ 약분 · 극한

$$1-t = (1-\sqrt{t})(1+\sqrt{t}) \quad (\text{by III})$$

$t \rightarrow 1$ 이면 분자·분모 모두 0
→ 약분부터!

$$\frac{S(t)}{(1-t)^2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1+t}{t}}}{2(1+\sqrt{t})} \rightarrow \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\textcircled{7} \quad \textcircled{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \textcircled{4}$$



여기서 많이 틀려요!
 $t=1$ 을 바로 넣으면 $\frac{0}{0}$ 이예요.
약분 먼저!

조건 사용 체크 : $0 < t < 1$ ✓ step ①③ 제1사분면 ✓ step ① 사각형 ABDC ✓ step ②

답 계산 : $t = 0.99 : 0.7098$ / $t = 0.9999 : 0.70713 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.70711$ 로 다가감 ✓

출제자의 함정 : 밑변 AB 하나로 삼각형처럼 계산하면?

$$\frac{AB \cdot h}{2} \div h^2 = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{t})} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} \leftarrow \text{선지 ②가 바로 이 함정!}$$

sol ② 넓이를 두 직사각형 사이에 끼우기

$$AB \cdot h < S < CD \cdot h \rightarrow \frac{AB}{h} < \frac{S}{h^2} < \frac{CD}{h}$$

$$\frac{AB}{h} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{t}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{CD}{h} = \frac{\sqrt{\frac{1+t}{t}}}{1+\sqrt{t}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{가운데도 } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

☆ 한 줄 정리 : $\frac{0}{0}$ 꼴 극한 = $1-t = (1-\sqrt{t})(1+\sqrt{t})$ 로 약분할 모양 만들기

그림 → 넓이 → 극한,
세 단계를 다 해냈어요!
4점 완벽 :)

두 양수 a, b ($a < b$) 에 대하여 $f(x) = \begin{cases} |-ax^2 + b| & (x \leq 0) \\ x^2 - 2ax + b^2 & (x > 0) \end{cases}$

양의 실수 t 에 대하여 직선 $y = t$ 와 $y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자. $g(t)$ 는 최솟값 2를 갖고, 두 상수 α, β 에 대하여

$$(가) \left| \lim_{t \rightarrow \alpha^-} g(t) - \lim_{t \rightarrow \alpha^+} g(t) \right| = 2$$

$$(나) \lim_{t \rightarrow \beta^-} g(t) - \lim_{t \rightarrow \beta^+} g(t) + 1 = g(\beta)$$

$$(다) g(\alpha) \neq g(\beta)$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha$, $\alpha + 24\beta = 30$ 일 때, $f(-2) + f(1) = \frac{q}{p}$ 이다. ㉟ $p + q = ?$
(p, q 는 서로소인 자연수)

이 문제가 보는 것 : 교점 개수 함수 $g(t) \rightarrow$ 개수가 바뀌는 높이(경계) 찾기 $\rightarrow$ 좌극한 · 함수값 · 우극한 비교

필요한 개념

미적분 I · 함수의 극한

I. 교점의 개수 : 수평선 $y = t$ 를 아래에서 위로 올리며 센다. 개수가 바뀌는 높이만 보면 된다

II. $\lim_{t \rightarrow c^-} g(t) =$ 수평선을 c 보다 살짝 아래 / $\lim_{t \rightarrow c^+} g(t) =$ 살짝 위 / $g(c) =$ 정확히 c

III. 절댓값 그래프 $|h(x)|$: $h(x) < 0$ 인 부분을 x 축 위로 접어 올린다

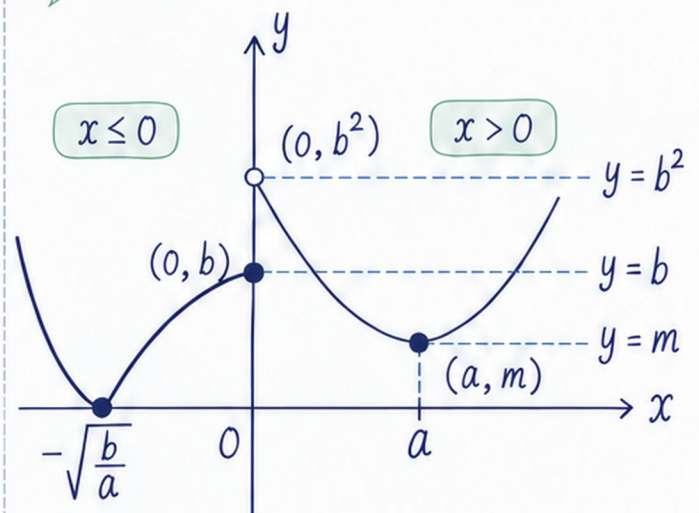
step ① 왼쪽 · 오른쪽 따로 세기

- $x \leq 0$: $(-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0)$ 까지 내려갔다가 $(0, b)$ 까지 올라감 (by III)

$$L(t) = \begin{cases} 2 & (0 < t \leq b) \\ 1 & (t > b) \end{cases}$$

- $x > 0$: $(x-a)^2 + m$, $m = b^2 - a^2$
 $\rightarrow$ 꼭짓점 (a, m) , $x \rightarrow 0^+$ 에서 높이 b^2

식이 두 개니까 $x \leq 0$ 쪽 개수 $L(t)$, $x > 0$ 쪽 개수 $R(t)$ 를 따로 세서 더해요!



(다음 쪽에 계속 $\rightarrow$)

#19 (계속)

$$R(t) = \begin{cases} 0 & (t < m) \\ 1 & (t = m) \\ 2 & (m < t < b^2) \\ 1 & (t \geq b^2) \end{cases} \rightarrow g = L + R$$

여기서 많이 틀려요!

$t = b^2$ 이면 오른쪽 식의 근은 $x = 0, 2a$ 인데 $x > 0$ 이니까 $x = 0$ 은 제외!
(반대로 $t = b$ 의 $x = 0$ 은 왼쪽 식에 포함)

step ② m 과 b 비교

- $m > b$ 이면
 $b < t < m$ 에서 $g = 1 + 0 = 1$
 $\rightarrow$ 최솟값 2에 모순
- $m = b$ 이면
바뀌는 곳이 두 곳뿐이고
차이가 1씩 $\rightarrow$ (가)를 만족하는 곳이 없음

$\therefore m < b$

최솟값이 2라는 조건부터 써 봐요.

step ③ $b \leq 1$ 이면 안 된다

- $0 < b < 1$ 이면 $m < b^2 < b$:

경계 c	m	b^2	b
(좌, 값, 우)	(2, 3, 4)	(4, 3, 3)	(3, 3, 2)
(나)의 좌변	-1	2	2

$\rightarrow$ (나)는 '(나)의 좌변 = $g(c)$ ' 인데
3이 되는 곳이 없음 $\rightarrow \beta$ 없음

- $b = 1$ 이면
 $m : (2, 3, 4), 1 : (4, 3, 2)$
 $\rightarrow \beta = 1, \alpha$ 는 m 또는 1
 $\rightarrow g(\alpha) = g(\beta) = 3, (다)$ 에 모순

$\therefore b > 1$

경계 m, b, b^2 마다 (좌극한, 함숫값, 우극한)을
표로 만들어요. (by II)



왜 경계만 봐요?

경계가 아닌 곳은 좌극한 = 우극한 = 함숫값이라
(가) · (나)가 성립할 수 없어요.

(다음 쪽에 계속 $\rightarrow$)

#19 (계속)

step ④ α, β 정하기

- $b > 1$ 이면 $m < b < b^2$:

경계 c	m	b	b^2
(좌, 값, 우)	(2, 3, 4)	(4, 4, 3)	(3, 2, 2)
(나)의 좌변	-1	2	2

- (가) : $|\text{좌} - \text{우}| = 2 \rightarrow \alpha = m$
- (나) : 좌변 = $g(c) \rightarrow b$ 에서 $2 \neq 4$,
 b^2 에서 $2 = 2 \rightarrow \beta = b^2$
- (다) : $g(\alpha) = 3 \neq 2 = g(\beta) \checkmark$

step ⑤ α, b 결정

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2 + m = \alpha = m \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha + 24\beta = \left(b^2 - \frac{1}{4}\right) + 24b^2 = 25b^2 - \frac{1}{4} = 30$$

$$\rightarrow b^2 = \frac{121}{100}, \quad b = \frac{11}{10}$$

step ⑥ 답

$$f(-2) = \left|-2 + \frac{11}{10}\right| = \frac{9}{10}, \quad f(1) = 1 - 1 + \frac{121}{100} = \frac{121}{100}$$

$$f(-2) + f(1) = \frac{211}{100} \quad (211 \text{은 } 2, 5 \text{의 배수가 아님} \rightarrow \text{서로소})$$

$$\textcircled{7} \quad p + q = 100 + 211 = \textcircled{311}$$

조건 사용 체크 : 최솟값 2 $\checkmark$ step ② (가) $\checkmark$ step ④ (나) $\checkmark$ step ③④ (다) $\checkmark$ step ③④
 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha, \quad \alpha + 24\beta = 30 \checkmark$ step ⑤

sol ② 숫자 조건으로 먼저 줄이기

α, β 는 경계 m, b, b^2 중 하나
 $b \leq 1$ 이면 모두 1 이하 $\rightarrow \alpha + 24\beta \leq 25 < 30$ 모순
 $\rightarrow b > 1 \rightarrow$ 바로 step ④로!

답 계산

$m = \frac{121}{100} - \frac{1}{4} = \frac{24}{25} < \frac{11}{10} < \frac{121}{100} \checkmark$ 순서 맞음
 $\alpha + 24\beta = 0.96 + 29.04 = 30 \checkmark$
 g 의 값은 2, 3, 4 $\rightarrow$ 최솟값 2 $\checkmark$

☆ 한 줄 정리 : 교점 개수 함수 = 수평선을 올리며 '바뀌는 높이'만 표로!
 (좌극한, 함숫값, 우극한)

1등급 도전 문제를 끝까지 풀었어요.
 이 표 만드는 법이면 비슷한
 문제도 무섭지 않아요! ㄹ