

확률과 통계 실전 모의고사 1회

진명여고 2학년 객관식 21문항 · 단답형 4문항 · 100점 · 50분

반 _____ 번호 _____ 이름 _____

범위: 미래엔 확률과 통계 처음부터 조건부확률(확률의 곱셈정리)까지 · 사건의 독립·종속, 독립시행, 원순열은 넣지 않았습니다.

1 $4\Pi_2 + 3H_3$ 의 값은?

- ① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

[3.4점]

2 7개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4를 모두 일렬로 나열하여 만들 수 있는 일곱 자리 자연수의 개수는?

- ① 600 ② 610 ③ 620 ④ 630 ⑤ 640

[3.4점]

3 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

일 때, $P(A \cap B)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

[3.4점]

4 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리 자연수 중 짝수의 개수는?

- ① 48 ② 54 ③ 60 ④ 66 ⑤ 72

[3.4점]

5 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 5의 배수일 확률은?

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{7}{36}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{18}$

[3.4점]

6 다항식 $(x + 3)^5$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는?

- ① 60 ② 70 ③ 80 ④ 90 ⑤ 100

[3.4점]

7 다음 표는 어느 고등학교 학생 60명의 등교 방법을 조사한 것이다.

		버스	도보	합계
(단위: 명)	남학생	12	18	30
	여학생	20	10	30
	합계	32	28	60

이 60명의 학생 중에서 임의로 택한 한 명이 버스로 등교하는 학생일 때, 이 학생이 여학생일 확률은?

- ① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[3.4점]

8 방정식 $x + y + z + w = 11$ 을 만족시키는 자연수 x, y, z, w 의 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는?

- ① 120 ② 126 ③ 132 ④ 138 ⑤ 144

[3.8점]

9 7개의 문자 a, a, a, b, b, c, d 를 모두 일렬로 나열할 때, c 가 d 보다 왼쪽에 오도록 나열하는 경우의 수는?

- ① 150 ② 165 ③ 180 ④ 195 ⑤ 210

[3.8점]

10 흰 공 3개와 검은 공 5개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공이 적어도 한 개 나올 확률은?

- ① $\frac{5}{7}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{11}{14}$ ④ $\frac{23}{28}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

[3.8점]

11 ${}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n \geq 500$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은?

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

[3.8점]

12 빨간 공 4개와 파란 공 6개가 들어 있는 주머니에서 임의로 공을 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 첫 번째에 파란 공, 두 번째에 빨간 공이 나올 확률은? (단, 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않는다.)

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{4}{15}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{7}{15}$

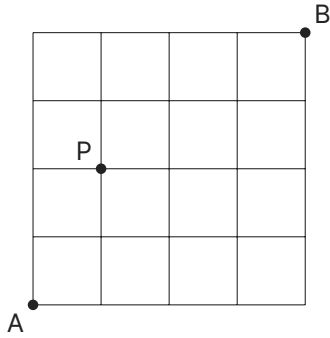
[3.8점]

13 같은 종류의 연필 12자루를 세 명의 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 줄 때, 각 학생이 연필을 2자루 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수는?

- ① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

[3.8점]

- 14** 그림과 같이 정사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경로 중에서 P 지점을 지나지 않는 경로의 수는?



- ① 35 ② 40 ③ 45 ④ 50 ⑤ 55

[3.8점]

- 15** 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수는?

(가) $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$
 (나) $f(4) - f(1) = 3$

- ① 40 ② 44 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

[4.2점]

- 16** 주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 4개와 검은 공 2개가 들어 있다. 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오면 주머니 A에서, 뒷면이 나오면 주머니 B에서 임의로 한 개의 공을 꺼낸다. 꺼낸 공이 흰 공이었을 때, 그 공이 주머니 A에서 꺼낸 공일 확률은?

- ① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[4.2점]

- 17** 양수 a 에 대하여 다항식 $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 160일 때, 이 전개식의 상수항은?

- ① 120 ② 150 ③ 180 ④ 210 ⑤ 240

[4.2점]

18 방정식 $x + y + z = 9$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 중에서 임의로 하나를 택할 때, 택한 순서쌍이 $xyz \neq 0$ 을 만족시킬 확률은?

- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{23}{55}$ ③ $\frac{26}{55}$ ④ $\frac{28}{55}$ ⑤ $\frac{6}{11}$ [4.2점]

19 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드를 모두 일렬로 나열할 때, 양 끝에 놓인 두 장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 짝수가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.)

- ① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32 [4.2점]

20 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 9장의 카드 중에서 임의로 3장을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 세 수의 합이 짝수일 확률은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{8}{21}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{10}{21}$ ⑤ $\frac{11}{21}$ [4.6점]

21 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 하자. ab 가 짝수일 때, $a + b$ 가 4의 배수일 확률은?

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{4}{27}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{5}{27}$ ⑤ $\frac{2}{9}$ [4.6점]

단답형 답만 쓰시오. 풀이 과정은 채점하지 않습니다.

단답형 1 자연수 a 에 대하여 다항식 $(x+a)^6$ 의 전개식에서 x^4 의 계수가 x^5 의 계수의 5배일 때, 이 전개식에서 x^3 의 계수를 구하시오.

답 [4.8점]

단답형 2 부등식 $x+y+z \leq 6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 중에서 x 가 짝수인 것의 개수를 구하시오. (단, 0은 짝수이다.)

답 [4.8점]

단답형 3 같은 종류의 사탕 10개를 세 명의 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 줄 때, 각 학생이 받는 사탕의 개수가 6 이하가 되도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

답 [4.9점]

단답형 4 어느 공장에서 생산하는 제품의 70%는 기계 A에서, 나머지 30%는 기계 B에서 생산된다. 기계 A에서 생산된 제품의 3%, 기계 B에서 생산된 제품의 8%가 불량품이라고 한다. 이 공장에서 생산된 제품 중에서 임의로 택한 한 개가 불량품일 때, 이 제품이 기계 B에서 생산된 제품일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

답 [4.9점]

정답과 풀이

빠른 정답

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
③	④	②	③	②	④	③	①	⑤	④	③	②	⑤

14	15	16	17	18	19	20	21	단1	단2	단3	단4
②	①	①	⑤	④	①	⑤	④	160	50	36	23

문항 구성

번호	단원	유형	난이도	배점
1	I-1·2 순열·중복조합	중복순열·중복조합 기호 값 계산	기본	3.4
2	I-1 여러 가지 순열	같은 것이 있는 순열(숫자 나열)	기본	3.4
3	II-2 확률의 덧셈정리	확률의 덧셈정리 식 계산	기본	3.4
4	I-1 여러 가지 순열	중복순열(세 자리 짝수 만들기)	기본	3.4
5	II-1 확률의 뜻과 활용	수학적 확률(주사위 두 개)	기본	3.4
6	I-3 이항정리	이항정리 특정 항의 계수	기본	3.4
7	II-3 조건부확률	표에서 조건부확률	기본	3.4
8	I-2 중복조합	방정식의 자연수 해의 개수	표준	3.8
9	I-1 여러 가지 순열	같은 것이 있는 순열+순서 고정	표준	3.8
10	II-2 확률의 덧셈정리	여사건의 확률(적어도 한 개)	표준	3.8
11	I-3 이항정리	이항계수의 성질(합의 부등식)	표준	3.8
12	II-3 조건부확률	확률의 곱셈정리(비복원 차례로 꺼내기)	표준	3.8
13	I-2 중복조합	같은 종류 물건 나누기(각각 2개 이상)	표준	3.8
14	I-1 여러 가지 순열	최단 경로(한 점을 지나지 않는 경우)	표준	3.8
15	I-2 중복조합	크기 조건이 있는 함수의 개수	발전	4.2
16	II-3 조건부확률	두 주머니 조건부확률(흰 공일 때 주머니 A)	발전	4.2
17	I-3 이항정리	전개식의 계수로 미지수 구한 뒤 상수항	발전	4.2
18	II-1 확률의 뜻과 활용	중복조합으로 센 경우의 수를 이용한 확률	발전	4.2
19	I-1 여러 가지 순열	카드 배열의 양 끝 조건(경우 나누기)	발전	4.2
20	II-2 확률의 덧셈정리	배반사건으로 나누어 더하는 확률	발전	4.6
21	II-3 조건부확률	조건부확률(주사위, 경우 세기)	발전	4.6
단답형 1	I-3 이항정리	두 항의 계수 관계로 a 구한 뒤 다른 계수	표준	4.8
단답형 2	I-2 중복조합	부등식의 정수해(짝수 조건)	발전	4.8
단답형 3	I-2 중복조합	분배의 상한 조건(여사건)	발전	4.9
단답형 4	II-3 조건부확률	실생활 조건부확률(불량품과 기계)	발전	4.9

난이도: 기본 7 · 표준 8 · 발전 10문항. 기출 고난도(여러 겹의 경우 나누기) 수준은 넣지 않고, 직전 보강 100제의 기본 발전 수준으로 맞췄습니다.

1 중복순열·중복조합 기호 값 계산

I-1·2 순열·중복조합 · 3.4점

정답 ③ (26)

1단계 중복순열의 값 구하기

서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하는 중복순열의 수는 $n\Pi_r = n^r$ 이므로 $4\Pi_2 = 4^2 = 16$ 이다.

2단계 중복조합의 값 구하기

서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하는 중복조합의 수는 $nH_r = n+r-1C_r$ 이므로 $3H_3 = 5C_3 = 5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ 이다.

기본

3단계 답 구하기

따라서 $4\Pi_2 + 3H_3 = 16 + 10 = 26$ 이다.

2 같은 것이 있는 순열(숫자 나열)

기본

I-1 여러 가지 순열 · 3.4점

정답 ④ (630)

1단계 같은 것이 있는 순열의 공식 떠올리기

n 개 중에 서로 같은 것이 각각 p 개, q 개, r 개씩 있을 때, n 개를 모두 일렬로

나열하는 경우의 수는 $\frac{n!}{p! \times q! \times r!}$ 이다.

2단계 답 구하기

7개의 숫자 중 1이 2개, 2가 2개, 3이 2개 있으므로 구하는 자연수의 개수는

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 2!} = \frac{5040}{8} = 630 \text{ 이다.}$$

3 확률의 덧셈정리 식 계산

II-2 확률의 덧셈정리 · 3.4점

정답 ② ($\frac{1}{3}$)

1단계 확률의 덧셈정리 쓰기

두 사건 A, B 에 대하여 확률의 덧셈정리 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 가 성립한다.

2단계 답 구하기

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

4 중복순열(세 자리 짝수 만들기)

I-1 여러 가지 순열 · 3.4점

정답 ③ (60)

1단계 자리마다 올 수 있는 숫자 세기

중복을 허락하여 나열하므로 각 자리에 올 수 있는 숫자의 개수를 곱의 법칙으로 곱한다.

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 1, 2, 3, 4의 4가지이다.

십의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4의 5가지가 모두 올 수 있다.

짝수가 되려면 일의 자리에 0, 2, 4 중 하나가 와야 하므로 3가지이다.

2단계 답 구하기

따라서 구하는 짝수의 개수는 $4 \times 5 \times 3 = 60$ 이다.

5 수학적 확률(주사위 두 개)

II-1 확률의 뜻과 활용 · 3.4점

정답 ② ($\frac{7}{36}$)

1단계 전체 경우의 수 구하기

서로 다른 두 개의 주사위를 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$ 이고, 각 경우는 같은 정도로 기대된다.

2단계 합이 5의 배수인 경우 세기

두 눈의 수의 합은 2 이상 12 이하이므로 5의 배수는 5 또는 10이다.

합이 5인 경우: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지

합이 10인 경우: (4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지

따라서 합이 5의 배수인 경우의 수는 $4 + 3 = 7$ 이다.

3단계 답 구하기

수학적 확률의 정의에 따라 구하는 확률은 $\frac{7}{36}$ 이다.

6 이항정리 특정 항의 계수

I-3 이항정리 · 3.4점

정답 ④ (90)

1단계 전개식의 일반항 쓰기

이항정리에 의하여 $(x + 3)^5$ 의 전개식의 일반항은 ${}_5C_r x^{5-r} 3^r$ 이다. (단, $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)

2단계 x^3 항 찾기

x^3 항은 $5 - r = 3$, 즉 $r = 2$ 일 때이므로 그 항은 ${}_5C_2 x^3 3^2$ 이다.

3단계 답 구하기

따라서 x^3 의 계수는 ${}_5C_2 \times 3^2 = 10 \times 9 = 90$ 이다.

7 표에서 조건부확률

II-3 조건부확률 · 3.4점

정답 ③ ($\frac{5}{8}$)

1단계 사건 정하기

택한 학생이 버스로 등교하는 사건을 A , 여학생인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 조건부확률 $P(B | A)$ 이다.

2단계 조건부확률 구하기

조건부확률의 정의 $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 를 쓴다. 표에서 버스로 등교하는 학생은 32명이고, 그중 여학생은 20명이므로 $P(A) = \frac{32}{60}$, $P(A \cap B) = \frac{20}{60}$ 이다.

3단계 답 구하기

따라서 $P(B | A) = \frac{20}{60} \div \frac{32}{60} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$ 이다.

8 방정식의 자연수 해의 개수

I-2 중복조합 · 3.8점

정답 ① (120)

1단계 자연수 조건을 음이 아닌 정수 조건으로 바꾸기

x, y, z, w 가 자연수이므로 $x = a + 1, y = b + 1, z = c + 1, w = d + 1$ (a, b, c, d 는 음이 아닌 정수)로 놓으면 $(a + 1) + (b + 1) + (c + 1) + (d + 1) = 11$, 즉 $a + b + c + d = 7$ 이다.

2단계 중복조합으로 세기

방정식 $a + b + c + d = 7$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 4개의 문자 a, b, c, d 에서 중복을 허락하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

3단계 답 구하기

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 ${}_4H_7 = {}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ 이다.

9 같은 것이 있는 순열+순서 고정

I-1 여러 가지 순열 · 3.8점

정답 ⑤ (210)

1단계 순서가 정해진 문자를 같은 문자로 보기

c 와 d 의 순서가 " c 가 왼쪽, d 가 오른쪽"으로 정해져 있으므로, c 와 d 를 모두 같은 문자 X 로 바꾸어 a, a, a, b, b, X, X 를 일렬로 나열한 뒤, 두 X 중 왼쪽 것을 c , 오른쪽 것을 d 로 바꾸면 된다.

2단계 같은 것이 있는 순열로 세기

a 가 3개, b 가 2개, X 가 2개이므로 나열하는 경우의 수는 $\frac{7!}{3! \times 2! \times 2!} = \frac{5040}{24} = 210$ 이다.

3단계 답 확인하기

X 를 c, d 로 되돌리는 방법은 한 가지뿐이므로 구하는 경우의 수는 210이다.

10 여사건의 확률(적어도 한 개)

II-2 확률의 덧셈정리 · 3.8점

정답 ④ ($\frac{23}{28}$)

1단계 여사건 생각하기

흰 공이 적어도 한 개 나오는 사건을 A 라 하면, 여사건 A^C 은 "흰 공이 한 개도 나오지 않는다", 즉 3개 모두 검은 공인 사건이다. 여사건의 확률 $P(A) = 1 - P(A^C)$ 을 이용한다.

2단계 여사건의 확률 구하기

8개의 공에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_8C_3 = 56$ 이고, 검은 공 5개에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_5C_3 = 10$ 이므로 $P(A^C) = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$ 이다.

3단계 답 구하기

따라서 $P(A) = 1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}$ 이다.

11 이항계수의 성질(합의 부등식)

I-3 이항정리 · 3.8점

정답 ③ (9)

1단계 이항계수의 성질 쓰기

이항정리에서 $(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$ 에 $x=1$ 을 대입하면 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$ 이다.

2단계 주어진 식 정리하기

${}_nC_0 = 1$ 이므로 ${}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n - 1$ 이다. 따라서 조건은 $2^n - 1 \geq 500$, 즉 $2^n \geq 501$ 이다.

3단계 답 구하기

$2^8 = 256 < 501$, $2^9 = 512 \geq 501$ 이므로 자연수 n 의 최솟값은 9이다.

12 확률의 곱셈정리(비복원 차례로 꺼내기)

표준

II-3 조건부확률 · 3.8점

정답 ② ($\frac{4}{15}$)

1단계 사건 정하기

첫 번째에 파란 공이 나오는 사건을 A , 두 번째에 빨간 공이 나오는 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(A \cap B)$ 이다.

2단계 확률의 곱셈정리 쓰기

확률의 곱셈정리에 의하여 $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ 이다.

처음에는 10개 중 파란 공이 6개이므로 $P(A) = \frac{6}{10}$ 이다.

파란 공 한 개를 꺼낸 뒤에는 9개 중 빨간 공이 4개 남아 있으므로 $P(B|A) = \frac{4}{9}$ 이다.

3단계 답 구하기

따라서 $P(A \cap B) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$ 이다.

13 같은 종류 물건 나누기(각각 2개 이상)

표준

I-2 중복조합 · 3.8점

정답 ⑤ (28)

1단계 먼저 나누어 줄 몫 정하기

각 학생이 2자루 이상 받아야 하므로 먼저 세 학생에게 2자루씩 모두 6자루를 나누어 준다. 남은 연필은 $12 - 6 = 6$ 자루이고, 이것은 받지 못하는 학생이 있어도 되도록 나누어 주면 된다.

2단계 중복조합으로 세기

같은 종류의 연필 6자루를 서로 다른 세 학생에게 나누어 주는 경우의 수는, 세 학생 중에서 중복을 허락하여 6명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$ 이다.

3단계 답 구하기

따라서 구하는 경우의 수는 28이다.

14 최단 경로(한 점을 지나지 않는 경우)

표준

I-1 여러 가지 순열 · 3.8점

정답 ② (40)

1단계 전체 최단 경로의 수 구하기

A에서 B까지 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 4칸, 위쪽으로 4칸 가야 한다. 오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a , 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b 라 하면, 최단 경로의 수는 a 4개와 b 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{8!}{4! \times 4!} = 70$ 이다.

2단계 P를 지나는 경로의 수 구하기

A에서 P까지는 오른쪽 1칸, 위쪽 2칸이므로 $\frac{3!}{1! \times 2!} = 3$ 가지이고, P에서 B까지는 오른쪽 3칸, 위쪽 2칸이므로 $\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$ 가지이다. 곱의 법칙에 의하여 P를 지나는 경로의 수는 $3 \times 10 = 30$ 이다.

3단계 답 구하기

표준

따라서 P를 지나지 않는 경로의 수는 $70 - 30 = 40$ 이다.

15 크기 조건이 있는 함수의 개수

I-2 중복조합 · 4.2점

정답 ① (40)

1단계 $f(1), f(4)$ 의 값 정하기

조건 (나)에서 $f(1) = k$ 라 하면 $f(4) = k + 3$ 이고, $f(4) \leq 7$ 이어야 하므로 $k = 1, 2, 3, 4$ 의 4가지이다.

2단계 $f(2), f(3)$ 의 개수 세기

조건 (가)에서 $k \leq f(2) \leq f(3) \leq k + 3$ 이므로 $f(2), f(3)$ 은 $k, k + 1, k + 2, k + 3$ 의 4개의 값 중에서 중복을 허락하여 2개를 택한 뒤 작은 것부터 차례로 대응시키면 된다. 따라서 그 경우의 수는 ${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$ 이다.

3단계 답 구하기

k 의 값 4가지 각각에 대하여 10가지씩 있으므로 구하는 함수의 개수는 $4 \times 10 = 40$ 이다.

16 두 주머니 조건부확률(흰 공일 때 주머니 A)

II-3 조건부확률 · 4.2점

정답 ① ($\frac{3}{8}$)

1단계 사건 정하고 각 경우의 확률 구하기

주머니 A에서 꺼내는 사건을 A, 주머니 B에서 꺼내는 사건을 B, 흰 공이 나오는 사건을 W라 하자. 동전의 앞면과 뒷면이 나올 확률은 각각 $\frac{1}{2}$ 이므로 확률의 곱셈정리에 의하여

$$P(A \cap W) = P(A)P(W | A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}, \quad P(B \cap W) = P(B)P(W | B) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

2단계 흰 공이 나올 확률 구하기

두 사건 $A \cap W, B \cap W$ 는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여 $P(W) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{3}{15} + \frac{5}{15} = \frac{8}{15}$ 이다.

3단계 답 구하기

구하는 확률은 조건부확률 $P(A | W) = \frac{P(A \cap W)}{P(W)} = \frac{1}{5} \div \frac{8}{15} = \frac{1}{5} \times \frac{15}{8} = \frac{3}{8}$ 이다.

17 전개식의 계수로 미지수 구한 뒤 상수항

I-3 이항정리 · 4.2점

정답 ⑤ (240)

1단계 전개식의 일반항 쓰기

이 항 정 리 에 의 하 여 $(x^2 + \frac{a}{x})^6$ 의 전 개 식 의 일 반 항 은 ${}_6C_r (x^2)^{6-r} (\frac{a}{x})^r = {}_6C_r a^r x^{12-2r} \cdot x^{-r} = {}_6C_r a^r x^{12-3r}$ 이다. (단, $r = 0, 1, \dots, 6$)

2단계 x^3 의 계수로 a 구하기

$12 - 3r = 3$ 에서 $r = 3$ 이므로 x^3 의 계수는 ${}_6C_3 a^3 = 20a^3$ 이다. $20a^3 = 160$ 에서 $a^3 = 8$ 이고 a 는 양수이므로 $a = 2$ 이다.

3단계 상수항 구하기

상수항은 $12 - 3r = 0$, 즉 $r = 4$ 일 때이므로 ${}_6C_4 a^4 = 15 \times 2^4 = 15 \times 16 = 240$ 이다.

18 중복조합으로 센 경우의 수를 이용한 확률

II-1 확률의 뜻과 활용 · 4.2점

정답 ④ ($\frac{28}{55}$)

1단계 전체 경우의 수 구하기

방정식 $x + y + z = 9$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 3개의 문자에서 중복을 허락하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$ 이다.

2단계 $xyz \neq 0$ 인 경우의 수 구하기

$xyz \neq 0$ 은 x, y, z 가 모두 0이 아니라는 뜻이므로 x, y, z 는 모두 자연수이다. $x = a + 1, y = b + 1, z = c + 1$ (a, b, c 는 음이 아닌 정수)로 놓으면 $a + b + c = 6$ 이므로 그 개수는 ${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$ 이다.

3단계 답 구하기

따라서 구하는 확률은 $\frac{28}{55}$ 이다.

19 카드 배열의 양 끝 조건(경우 나누기)

I-1 여러 가지 순열 · 4.2점

정답 ① (24)

1단계 양 끝에 올 수 있는 경우 나누기

두 수의 합이 짝수가 되려면 두 수가 모두 홀수이거나 모두 짝수이어야 한다. 카드의 숫자 중 홀수는 1, 1, 3이고 짝수는 2, 2, 2이므로 양 끝의 두 수는 (1, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2) 중 하나이다.

2단계 각 경우의 수 구하기

양 끝이 (1, 1)인 경우: 가운데에 2, 2, 3을 나열하므로 $\frac{4!}{3!} = 4$ 가지

양 끝이 (1, 3) 또는 (3, 1)인 경우: 가운데에 1, 2, 2를 나열하므로 각각 $\frac{4!}{3!} = 4$ 가지, 모두 $4 \times 2 = 8$ 가지

양 끝이 (2, 2)인 경우: 가운데에 1, 1, 2, 3을 나열하므로 $\frac{4!}{2!} = 12$ 가지

3단계 답 구하기

각 경우는 동시에 일어날 수 없으므로 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $4 + 8 + 12 = 24$ 이다.

20 배반사건으로 나누어 더하는 확률

II-2 확률의 덧셈정리 · 4.6점

정답 ⑥ ($\frac{11}{21}$)

1단계 전체 경우의 수와 사건 나누기

9장 중 3장을 꺼내는 경우의 수는 ${}_9C_3 = 84$ 이다. 1부터 9까지의 자연수 중 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이다. 세 수의 합이 짝수가 되는 것은 “세 수가 모두 짝수”인 사건 A 와 “홀수 2개, 짝수 1개”인 사건 B 뿐이고, 두 사건은 서로 배반사건이다.

2단계 각 사건의 확률 구하기

$$P(A) = \frac{{}_4C_3}{{}_84} = \frac{4}{84}, \quad P(B) = \frac{{}_5C_2 \times {}_4C_1}{{}_84} = \frac{10 \times 4}{84} = \frac{40}{84} \text{ 이다.}$$

3단계 답 구하기

$$\text{확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은 } P(A) + P(B) = \frac{4}{84} + \frac{40}{84} = \frac{44}{84} = \frac{11}{21} \text{ 이다.}$$

21 조건부확률 (주사위, 경우 세기)

II-3 조건부확률 · 4.6점

정답 ④ $\left(\frac{5}{27}\right)$

1단계 조건이 되는 사건의 경우의 수 구하기

ab 가 짝수인 사건을 A , $a+b$ 가 4의 배수인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ 이다. 전체 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$ 이고, ab 가 홀수인 경우는 a, b 가 모두 홀수인 $3 \times 3 = 9$ 가지이므로 $n(A) = 36 - 9 = 27$ 이다.

2단계 $A \cap B$ 의 경우의 수 구하기

$a+b$ 는 2 이상 12 이하이므로 4의 배수는 4, 8, 12이다. 이 중 ab 가 짝수인 것, 즉 a, b 중 적어도 하나가 짝수인 것만 센다.

$a+b=4$: (1, 3), (2, 2), (3, 1) 중 (2, 2)의 1가지

$a+b=8$: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) 중 (2, 6), (4, 4), (6, 2)의 3가지

$a+b=12$: (6, 6)의 1가지

따라서 $n(A \cap B) = 1 + 3 + 1 = 5$ 이다.

3단계 답 구하기

$$P(B|A) = \frac{5}{27} \text{ 이다.}$$

단답형 1 두 항의 계수 관계로 a 구한 뒤 다른 계수

I-3 이항정리 · 4.8점

정답 160

1단계 전개식의 일반항 쓰기

이항정리에 의하여 $(x+a)^6$ 의 전개식의 일반항은 ${}_6C_r x^{6-r} a^r$ 이다. (단, $r = 0, 1, \dots, 6$)

x^5 의 계수는 $r=1$ 일 때이므로 ${}_6C_1 a = 6a$ 이고, x^4 의 계수는 $r=2$ 일 때이므로 ${}_6C_2 a^2 = 15a^2$ 이다.

2단계 조건으로 a 구하기

x^4 의 계수가 x^5 의 계수의 5배이므로 $15a^2 = 5 \times 6a = 30a$ 이다. a 는 자연수이므로 양변을 $15a$ 로 나누면 $a=2$ 이다.

3단계 x^3 의 계수 구하기

x^3 의 계수는 $r=3$ 일 때이므로 ${}_6C_3 a^3 = 20 \times 2^3 = 20 \times 8 = 160$ 이다.

단답형 2 부등식의 정수해 (짝수 조건)

I-2 중복조합 · 4.8점

정답 50

1단계 부등식을 방정식으로 바꾸기

$x+y+z \leq 6$ 이면 $w = 6 - (x+y+z)$ 는 음이 아닌 정수이므로, 부등식의 해의 개수는 방정식 $x+y+z+w=6$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다. x 의 값에 따라 경우를 나누어 센다.

2단계 x 의 값에 따라 경우 나누기

x 는 6 이하의 짝수이므로 $x=0, 2, 4, 6$ 이다.

$x=0$: $y+z+w=6$ 의 음이 아닌 정수해의 개수는 ${}_3H_6 = {}_8C_2 = 28$

$x=2$: $y+z+w=4$ 에서 ${}_3H_4 = {}_6C_2 = 15$

$x=4$: $y+z+w=2$ 에서 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

$x=6$: $y+z+w=0$ 에서 (0, 0, 0)의 1가지

3단계 답 구하기

합의 법칙에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는 $28 + 15 + 6 + 1 = 50$ 이다.

단답형 3 분배의 상한 조건 (여사건)

I-2 중복조합 · 4.9점

정답 36

1단계 전체 경우의 수 구하기

세 학생이 받는 사탕의 개수를 각각 a, b, c 라 하면 $a+b+c=10$ 이고 a, b, c 는 음이 아닌 정수이다. 조건 없이 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_{10} = {}_{12}C_2 = 66$ 이다.

2단계 조건에 어긋나는 경우 (여사건) 세기

“각 학생이 6개 이하”의 반대는 “어떤 학생이 7개 이상 받는다”이다. 사탕이 10개뿐이므로 7개 이상 받는 학생은 많아야 한 명이다.

학생 A가 7개 이상 받는 경우: 먼저 A에게 7개를 주고 남은 3개를 세 학생에게 나누어 주면 되므로 ${}_3H_3 = {}_5C_2 = 10$ 가지

학생 B, C가 7개 이상 받는 경우도 각각 10가지이므로 어긋나는 경우는 모두 $10 \times 3 = 30$ 가지이다.

3단계 답 구하기

따라서 구하는 경우의 수는 $66 - 30 = 36$ 이다.

단답형 4 실생활 조건부확률 (불량품과 기계)

II-3 조건부확률 · 4.9점

정답 23

1단계 사건 정하고 각 경우의 확률 구하기

택한 제품이 기계 A, B에서 생산된 사건을 각각 A, B , 불량품인 사건을 E

라 하면 $P(A) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$, $P(B) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$, $P(E | A) = \frac{3}{100}$,

$P(E | B) = \frac{8}{100}$ 이다. 확률의 곱셈정리에 의하여

$P(A \cap E) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{100} = \frac{21}{1000}$, $P(B \cap E) = \frac{3}{10} \times \frac{8}{100} = \frac{24}{1000}$ 이다.

2단계 불량품일 확률 구하기

두 사건 $A \cap E, B \cap E$ 는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$P(E) = \frac{21}{1000} + \frac{24}{1000} = \frac{45}{1000}$ 이다.

3단계 조건부확률과 답 구하기

구하는 확률은 $P(B | E) = \frac{P(B \cap E)}{P(E)} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$ 이다. 따라서 $p = 15$, $q = 8$ 이므로 $p + q = 23$ 이다.